Séries entières

Aubin SIONVILLE

MPI Clemenceau - 2021-2023

Définition

Série entière

$\sum f_n$ est une série entière si

$$\boxed{\exists (a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = a_n x^n}$$

Rayon de convergence

Lemme d'Abel

Soit $x_0 > 0$,

$$\boxed{(a_n x_0^n) \text{ bornee} \implies (\forall x \in]-x_0, x_0[, \sum a_n x^n \text{ converge absolument})}$$

Convergence et divergence

$$\boxed{\exists ! R \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}, \forall x \in]-R, R[\begin{cases} |x| < R \implies \sum a_n x^n \text{ converge absolument} \\ |x| > R \implies \sum a_n x^n \text{ diverge grossièrement} \end{cases}}$$

$$\boxed{a_n = O(b_n) \implies R_a \geq R_b}$$

$$\boxed{a_n \sim b_n \implies R_a = R_b}$$

$$\boxed{\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |a_n| \leq b_n \implies R_a \geq R_b}$$

Convergence normale

$\sum a_n x^n$ converge normalement donc uniformément sur tout segment inclus dans $]-R, R[$

Continuité

$x \mapsto \sum a_n x^n$ est continue sur $]-R, R[$

Théorème d'Abel radial

$$\boxed{\sum a_n R^n \text{ cv} \iff \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \underset{x \to R^-}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n \text{ cv}}$$

Dériver / Intégrer

Dériver

On peut dériver terme à terme une série entière sans changer le rayon de convergence

$$\boxed{\forall x \in]-R,+R[, \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)}$$

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ est } \boxed{\mathcal{C}^\infty} \text{ sur }]-R,R[\text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \boxed{a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}}$$

Intégrer

On peut intégrer terme à terme une série entière sans changer le rayon de convergence

$$\boxed{\forall x \in]-R,+R[, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n\right) \mathrm{d}t}$$

Développements en série entière

f est développable en série entière (de manière unique) sur $]-r,+r[$ si

$$\boxed{\exists \sum a_n x^n \text{ de rayon de cv } R \geq r \text{ tq } \forall x \in]-r,+r[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n}$$

f est $DSE \implies f$ est $\mathcal{C}^\infty$
f est $DSE \not\Longleftarrow f$ est $\mathcal{C}^\infty$

$$\boxed{\forall x \in]-r,+r[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n}$$

$$\boxed{f \text{ est } DSE \text{ sur }]-r,+r[\iff \begin{cases} f \text{ est } \mathcal{C}^\infty \text{ sur }]-r,+r[\\ \forall x \in]-r,+r[, f(x) - \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} \end{cases}}$$

Produit de Cauchy et Somme

On a deux séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ de rayon de convergence R_a et R_b.
Soit $c_n = a_n + b_n$ et R le rayon de cv de $\sum c_n x^n$.